# 流れ関数について

２次元デカルト座標系において，図１に示すような場合を考える．経路 AB 間を通過する流量（今は 2 次元なので，単位は m$^2$/s となるのに注意）は，経路上の局所速度の法線成分を線積分することにより得られる．

$$(\text{Flow rate}) = \int_A^B q_n ds = \int_A^B \vec{q}\cdot\vec{n}\,ds = \int_A^B \left(un_x + vn_y\right)ds = \int_A^B \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}n_x - \frac{\partial\psi}{\partial x}n_y\right)ds \qquad (1)$$

ここで，この曲線（積分経路）に対しての単位法線ベクトル $\vec{n}$ と $d\vec{s}$ ベクトルとは互いに直交するので，

$$\vec{n} = \vec{e}_x \frac{dy}{ds} - \vec{e}_y \frac{dx}{ds} \quad \left(\because \quad d\vec{s} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy\right) \qquad (2)$$

と書けるだろう．確認のために，大きさを求めると確かに 1 になる．

$$|\vec{n}| = \sqrt{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(-\frac{dx}{ds}\right)^2} = \frac{\sqrt{(dy)^2 + (dx)^2}}{ds} = 1$$

式(2)を式(1)に代入して，流量は

$$\begin{aligned}(\text{Flow rate}) &= \int_A^B \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}n_x - \frac{\partial\psi}{\partial x}n_y\right)ds = \int_A^B \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}\right)ds \\ &= \int_A^B \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx\right) = \int_A^B d\psi = \psi(B) - \psi(A)\end{aligned} \qquad (3)$$

となる．よって，AB 間の曲線の経路に依らず，2 点間を通過する流量は，2 点間の流れ関数値の差に等しいことがわかる．

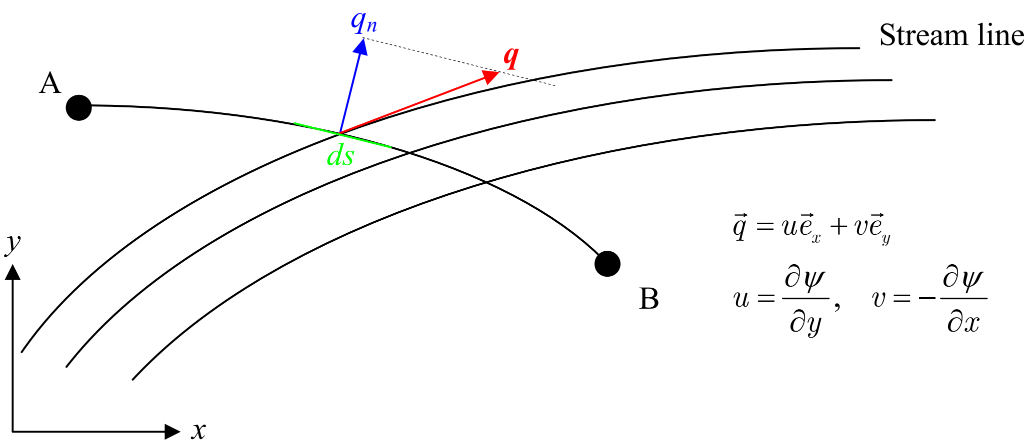


図１　ある積分経路 AB と流線の交点における速度ベクトル $\boldsymbol{q}$，法線速度 $q_n$，積分線素 $ds$．単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $q_n$ に平行である．